WAS KANN MAN VON „PFLICHTBEWUSSTEN" STICHPROBEN ERWARTEN?

Wahrscheinlichkeitsrechnung im Dienste angewandter Statistik

Werner PESCHEK, Univ. Klagenfurt

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet heute meist den Schwerpunkt der (schulischen) Stochastik. Bei aller Wertschätzung und Begeisterung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie halte ich dies für einen Fehler, der nicht zuletzt auf einer didaktischen Fehleinschätzung beruht: Die Beschreibende Statistik wird vielfach als zu einfach und elementar, die Schließende Statistik als zu schwierig für die Schule angesehen.
Was bleibt ist die Wahrscheinlichkeitstheorie, die dann in vielen Fällen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung reduziert wird, sich also vor allem um die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bemüht, weniger um eine angemessene und verständige Interpretation der zentralen Begriffe und Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie oder um die Rolle der Wahrscheinlichkeitstheorie als Bindeglied zwischen den beiden Statistiken. Was Lernenden (wie auch Lehrenden) dabei den Zugang zu zentralen Ideen der Wahrscheinlichkeitstheorie beträchtlich erschweren kann, ist die an vielen einführenden Lehrbüchern nachvollziehbare Beobachtung,

- dass grundlegende Begriffe (wie Ergebnis, Ereignis, Elementarereignis, Ergebnis- bzw. Ereignisraum, Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Verteilungsfunktion, etc.) oft sehr formalistisch-exakt eingeführt werden, obwohl diese Begriffe später gar nicht mehr, nicht in dieser Exaktheit oder überhaupt in ganz anderer Form benötigt werden;
- dass nicht selten unverständliche, gelegentlich auch falsche Erklärungen verwendet werden;
- dass die zahlreichen, zum Teil sehr diffizilen kombinatorischen Aufgaben die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Kombinatorik umfunktionieren und vom eigentlichen Anliegen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ablenken;
- dass der weitgehende Verzicht auf relevante statistische Fragestellungen die zahlreichen Glücksspiele als zentrale "Anwendungen", die Wahrscheinlichkeitsrechnung damit als kaum ernst zu nehmende "Würfelbudenmathematik" erscheinen lässt;
- dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung oft wie ein Fremdkörper zwischen den beiden Statistiken steht und nicht adäquat auf die Schließende Statistik vorbereitet.

Im Folgenden wird ein Konzept der Wahrscheinlichkeitsrechnung skizziert und vorgeschlagen, das auf Kombinatorik und Glücksspiele weitgehend verzichtet, sich einer inhaltlich-intuitiven Argumentation bedient und die Anliegen und Fragestellungen einer (nicht bayesianischen) angewandten Statistik in den Vordergrund stellt (siehe auch Peschek 1995).

1. Stichproben

Die Beschreibende Statistik beschränkt sich im Wesentlichen auf Aussagen über vorliegende, von ihr erhobene Daten. In der Praxis steht man aber nicht selten vor der Situation, dass man an Aussagen über Daten interessiert ist, die man nicht oder nur mit unangemessen hohem Aufwand vollständig erheben kann:
Wenn man wissen will, wie viele österreichische Familien ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben, wird man kaum alle österreichischen Familien befragen (eine derartige Befragung wäre viel zu aufwendig), sondern man wird sich darauf beschränken, einige hundert österreichische Familien entsprechend zu befragen.
Die Funktionsfähigkeit von Streichhölzern testet man am besten durch Abbrennen. Es würde aber wenig Sinn machen, alle 5 Milliarden Streichhölzer eines Lagers abzubrennen, um dann festzustellen, dass der Ausschussanteil 2% betrug.
Bei vielen statistischen Untersuchungen wird man sich also auf Teilerhebungen, sogenannte **Stichproben**, beschränken müssen, um dann von diesen Stichproben auf die interessierende Grundgesamtheit zu schließen. Man nimmt dabei an, dass das Stichprobenergebnis in etwa dem Wert in der Grundgesamtheit entsprechen wird und umgekehrt, also:

Parameter in der Grundgesamtheit ≈ Parameter in der Stichprobe

Beispiel 1: Man stellt sich vor den Haupteingang der Universität Wien und befragt die ein- und ausgehenden Personen, ob sie Matura haben. 91 von 100 befragten Personen bejahen die Frage - somit weiß man, dass ungefähr 91% aller Österreicher/innen Matura haben.

Es ist (uns) schon klar, dass es so nicht gehen kann. Offenbar ist aber das Problem der geeigneten Stichprobenauswahl nicht allen (mit statistischen Zahlen operierenden) Menschen als Problem bewusst (Abb. 1).

83 Prozent wollen die Formel 1 in Österreich

Eine Meinungsumfrage in der TV-Sportarena ergab ein klares Votum für eine Renaissance des Grand-Prix-Zirkus auf dem Österreichring.

Klares Ja für die Formel 1, klares Ja für den Motorsport. 83 Prozent stimmten Montagabend in einer Umfrage während der TV-Sportarena für ein Formel-1-Comeback für den Österreichring – mehr als für einen EU-Beitritt. Und schon 1991 sprachen sich 93 Prozent bei einer Umfrage der KLEINEN ZEITUNG für den Weiterbetrieb des Österreich-Rings aus. Damals flatterten 32.000 Stimmzettel in unsere Redaktionen, davon waren über 29.000 für Motorsport auf dem Ö-Ring.

Abb. 1: Kleine Zeitung, 13. 7. 1994, S. 39

Als Statistiker/in weiß man, dass man bei der Auswahl von Stichproben sehr behutsam sein muss. Für die Stochastikausbildung erscheint es von Bedeutung, diese Problematik zu thematisieren und einige Methoden der **Stichprobenauswahl** vorzustellen: *Zufällige Auswahl* als theoretisches Konzept, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Schließenden Statistik zugrunde liegt, *zufallsähnliche Verfahren* (z. B. Buchstaben-, Geburtstags-, Schlussziffernverfahren), *Klumpenauswahl, geschichtete Stichproben* als praktikablere Methoden.

2. Zwei Wahrscheinlichkeitsinterpretationen

Hat man eine "geeignete" Stichprobenauswahl getroffen, so stellt sich die Frage: *„Was kann man von dieser Stichprobe erwarten?"* Überlegen wir anhand eines Beispiels:

Beispiel 2: Angenommen man weiß, dass 30% aller österreichischen Familien ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben.
Was kann man erwarten, wenn man unter allen österreichischen Familien eine Familie zufällig auswählt (also die kleinstmögliche Stichprobe zieht)?

Nun, man kann eine Familie mit Auslandsurlaub auswählen oder auch nicht, beides ist selbstverständlich möglich. Wenn man aber wetten müsste, würde man wohl eher nicht auf eine Familie mit Auslandsurlaub setzen. Das hat mit deren eher niederen relativen Anteil in der Grundgesamtheit (30%) zu tun. Es erscheint sinnvoll, diesen relativen Anteil als quantitatives Maß für die Erwartung zu nehmen:

Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil in der Grundgesamtheit
Wird unter allen Elementen einer endlichen Grundgesamtheit G ein Element zufällig ausgewählt, so kann man als Maß für die Erwartung, genau ein Element einer Teilmenge A auszuwählen, den relativen Anteil h(A) (mit h(A)=a/g; a bzw. g meint die Mächtigkeit von A bzw. G) nehmen. Man schreibt:

$$\mathbf{P(E) = h(A)}$$

wobei *P(E)* die *Wahrscheinlichkeit* für das Ereignis E angibt, dass ein aus G zufällig ausgewähltes Element der Teilmenge A angehört.

Man sieht: *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung quantifiziert das Maß der Erwartung durch eine dem relativen Anteil entsprechende Zahl zwischen 0 und 1.*

Für die Untersuchung größerer Stichproben, die man als längere Serien derartiger Zufallsversuche auffassen kann, hilft diese Wahrscheinlichkeitsinterpretation nur beschränkt weiter. Hilfreich ist in diesem Fall aber die als **Empirisches Gesetz der großen Zahlen** bekannte Erfahrungstatsache, dass sich *die relative Häufigkeit h(E) eines Ereignisses* (h(E) = k/n, wenn das Ereignis E unter den ersten n Versuchen k mal eingetreten ist) *mit zunehmender Versuchsanzahl um einen festen Wert "stabilisiert"* (vgl. Abb. 2):

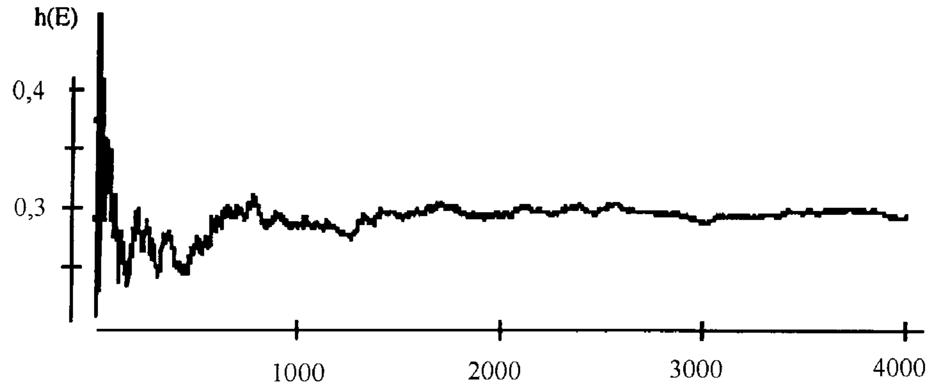

Abb. 2

Diese empirische Erfahrungstatsache legt eine weitere Wahrscheinlichkeitsinterpretation nahe:

Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit in einer Versuchsserie

Nach dem Empirischen Gesetz der großen Zahlen "stabilisieren" sich die relativen Häufigkeiten h(E) in einer Versuchsserie um einen festen Wert, und es erscheint zweckmäßig, diesen Wert als Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E zu nehmen:

$$\mathbf{h(E) \approx P(E)}$$

3. Zusammenhang zwischen Grundgesamtheit und Stichprobe

Mit Hilfe dieser beiden Wahrscheinlichkeitsinterpretationen lässt sich der **Zusammenhang zwischen** Parameter **der Stichprobe und der Grundgesamtheit** genauer erklären:

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E in einer (längeren) Versuchsserie (Stichprobe) ist ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis E: **h(E) ≈ P(E)**

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E ist aber gleich dem relativen Anteil dieses Ereignisses E in der Grundgesamtheit: **P(E) = h(A)**

Beide Wahrscheinlichkeitsinterpretationen zusammen erklären den (bisher spekulativen) Zusammenhang zwischen Stichprobe (Stpr) und Grundgesamtheit (Gg) mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbegriffs:

$$\mathbf{h(E) \approx P(E) = h(A)}$$

$$\textbf{Stpr} \longleftrightarrow \textbf{Gg}$$

Diese Gleichungskette *von links nach rechts* gelesen, zeigt eine *globale Idee der Schließenden Statistik*, nämlich den Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit ("Hochrechnung").

Die Gleichungskette *von rechts nach links* gelesen, verweist auf den Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe und damit auf die im Hinblick auf eine angewandte Statistik *zentrale Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, nämlich:

4. Was kann man von einer "pflichtbewussten" Stichprobe erwarten?

Beispiel 3: Angenommen man weiß, dass 30% aller österreichischen Familien ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben.
Was kann man erwarten, wenn man 50 österreichische Familien zufällig auswählt und sie entsprechend befragt?

- Es ist sehr unwahrscheinlich, dass man nur Familien erhält, die ihren Sommerurlaub im Ausland verbracht haben: $P(B=50) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot \ldots \cdot 0{,}3 = 0{,}3^{50} \approx 0$
  (Bei der Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeit kommt die *Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse* zur Anwendung.)
- Es ist fast ebenso unwahrscheinlich, dass keine der befragten 50 Familien ihren Sommerurlaub im Ausland verbracht hat: $P(B=0) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot \ldots \cdot 0{,}7 = 0{,}7^{50} \approx 0$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass 49 der befragten Familien im letzten Sommer im Ausland waren, ist auch nicht sehr viel größer: $P(B=49) = 50 \cdot 0{,}3^{49} \cdot 0{,}7 \approx 0$
  (Zur Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse kommt hier die *Additionsregel für einander ausschließende Ereignisse* hinzu.)
- Analoges gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine Familie im Ausland war:
  $P(B=1) = 50 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{49} \approx 0$

Die Wahrscheinlichkeiten P(B=2), P(B=3), ..., P(B=48) sind umständlicher zu berechnen – es empfiehlt sich, sich über den Typ der Wahrscheinlichkeitsverteilung Klarheit zu verschaffen, um sich dann entsprechender Formeln, Tabellen oder Computersoftware zu bedienen. In unserem Beispiel erhält man für (die Zufallsgröße) B = 0, 1, ... , 50 eine *Binomialverteilung* bzw. eine durch Binomialverteilung approximierbare *Hypergeometrische Verteilung* (je nachdem, ob man immer aus allen österreichischen Familien auswählt oder nur aus jenen, die zuvor noch nicht ausgewählt wurden) mit *Erwartungswert* ("Mittelwert") μ und *Standardabweichung* ("Streuung") σ. In vielen praktisch relevanten Fällen (größere Stichproben) sind die beiden Verteilungen einander sehr ähnlich und durch eine *Normalverteilung* gut approximierbar.

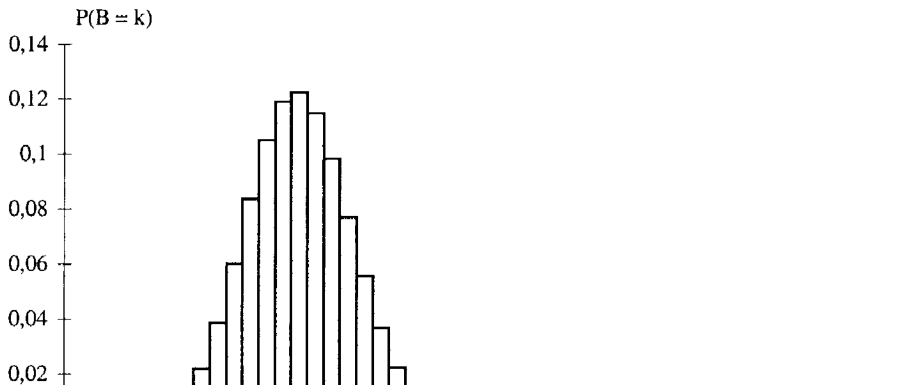

Abb. 3

Aus der in Abb. 3 grafisch dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung erkennt man, dass $n \cdot p=15$ Familien mit Auslandsurlaub am wahrscheinlichsten sind. Aber auch 13, 14, 16, 17 Familien wären keine besondere Überraschung. Müsste man wetten, wäre es ziemlich riskant, auf genau 15 Familien zu setzen, also eine "Punktschätzung" abzugeben (die Wahrscheinlichkeit dafür ist nur ca. 12%).
Man geht jedoch kein allzu großes Risiko ein, wenn man z. B. prognostiziert, dass es "zwischen 10 und 20 Familien" sein werden, die ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben, wenn man also eine "Intervallschätzung" macht (die Wahrscheinlichkeit dafür ist ca. 92%).

Damit haben wir eine Antwort auf die für die (angewandte) Statistik wesentlichste Frage an die Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden: Mit ***hoher Wahrscheinlichkeit*** γ (hier 92%) wird man eine Stichprobe ziehen, in der es 10, 11, ..., 19 oder 20, also **zwischen 10 und 20 Familien** gibt, die ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben.
Ein derartiges **Intervall**, in dem der untersuchte Parameter der Stichprobe - in unserem Fall die (relativen) Häufigkeiten - mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit γ liegt, nennt man einen **γ- Schätzbereich** (für relative Häufigkeiten). Der γ - Schätzbereich ist somit die mathematische Antwort auf die zentrale Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zu einem solchen γ - Schätzbereich lassen sich drei verschiedene, praktisch durchaus relevante Typen von Fragestellungen formulieren:

Beispiel 4 (gegeben n und γ, gesucht ε): Wie viele österreichische Familien mit Auslandsurlaub kann man in einer Stichprobe von 1000 zufällig ausgewählten Familien mit 95% Sicherheit erwarten?

Beispiel 5 (gegeben n und ε, gesucht γ): Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man unter 1000 zufällig ausgewählten österreichischen Familien zwischen 145 und 155 Familien mit Auslandsurlaub?

Beispiel 6 (gegeben ε und γ, gesucht n): Wie viele österreichische Familien muss man zufällig auswählen, damit man mit 95% Sicherheit mindestens 145 (höchstens 155; zwischen 145 und 155) Familien mit Auslandsurlaub in der Stichprobe hat?

5. Resumé: γ - Schätzbereich als globale Idee

Wir sind davon ausgegangen, dass man den relativen Anteil p in der Grundgesamtheit kennt und haben dann die etwas unpräzise Vermutung aufgestellt, dass man von einer geeigneten Stichprobe ***erwarten*** kann, dass der entsprechende Stichprobenanteil ebenfalls ***ungefähr*** p beträgt.
Mit Hilfe der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* lässt sich diese Aussage nun mathematisch *präzisieren* und *quantifizieren*:

"erwarten": Wahrscheinlichkeit $0 \leq P \leq 1$ als quantitatives Maß für diese Erwartung
"ungefähr": Angabe eines (i. A. um p symmetrischen) Intervalls

Zusammengefasst heißt dies: Mit (hoher) **Wahrscheinlichkeit** γ liegt der Stichprobenanteil im **Intervall [p - ε; p + ε]**.

Dieses Intervall $[p - \varepsilon; p + \varepsilon]$ ist, zusammen mit der Wahrscheinlichkeit γ, eine sinnvolle Antwort auf die Frage, was man von einer geeigneten Stichprobe erwarten kann; man nennt dieses Intervall **γ - Schätzbereich** für die relativen Häufigkeiten in der Stichprobe (siehe Abb. 4).

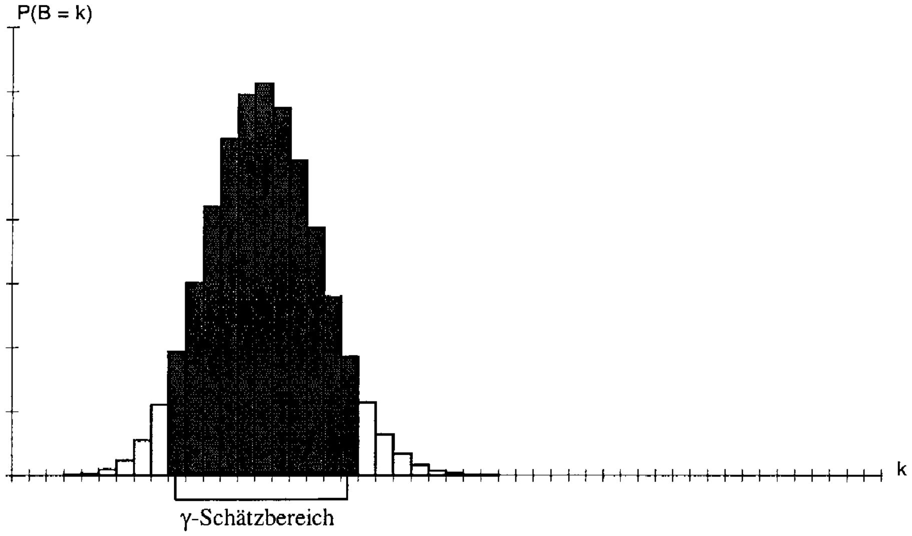

Abb. 4

Will man einen Schätzbereich mit hoher Wahrscheinlichkeit (Sicherheit) γ, so bedeutet dies, dass der Schätzbereich breiter, die Aussage somit "ungenauer" wird. Will man umgekehrt die "Präzision" der Aussage erhöhen, also den Schätzbereich verkleinern, so wird dadurch die Wahrscheinlichkeit (Sicherheit) γ, mit der die getroffene Aussage zutrifft, sinken. Es wird also in jedem Fall nötig sein, einen im Hinblick auf den Kontext adäquaten Mittelweg zwischen "Präzision" und Sicherheit der Aussage zu finden.

Mit diesem **γ - Schätzbereich** hat man die für die angewandte Statistik **globale Idee der Wahrscheinlichkeitsrechnung** herausgearbeitet. Je nach Problemstellung bzw. Modellierung wird man diese Idee auf Binomialverteilungen, Hypergeometrische Verteilungen, Student-Verteilungen, Chi^2-Verteilungen oder andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen, insbesondere auch auf die Normalverteilung, anzuwenden haben. Die Grundidee bleibt dabei von der Art der Verteilung unberührt.

In der folgenden Tabelle sind die im Hinblick auf eine angewandte Statistik globale Idee der Wahrscheinlichkeitsrechnung, lokale Bedeutungen und die damit erforderlichen zentralen Tätigkeiten in übersichtlicher Form zusammengefasst:

<table>
<tr><th colspan="3">WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
Aus bekannten Wahrscheinlichkeiten werden neue (noch unbekannte) Wahrscheinlichkeiten berechnet.</th></tr>
<tr><th>Globale Idee</th><th>Lokale Bedeutungen</th><th>Zentrale Tätigkeiten</th></tr>
<tr><td rowspan="5">γ - SCHÄTZBEREICH als mathematische Antwort auf die zentrale Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Was kann man von "pflichtbewussten" Stichproben erwarten? (Mathematisierung von Stpr $\approx$ Gg)</td><td>Stichprobe als Serie von Zufallsversuchen</td><td>Ziehen von Stichproben</td></tr>
<tr><td>Zwei Wahrscheinlichkeits-interpretationen</td><td></td></tr>
<tr><td>Deutung von Addition und Multiplikation</td><td>Addieren und Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten</td></tr>
<tr><td>Anwendungsbereiche und Eigenschaften diverser Wahrscheinlichkeits-verteilungen</td><td>Arbeiten mit verschiedenen Wahrscheinlichkeits-verteilungen; Lage- und Streuungs-parameter; Approximieren mit Normalverteilung</td></tr>
<tr><td>γ - Schätzbereich als Intervall, in dem Stichprobenergebnisse mit Wahrscheinlichkeit γ liegen</td><td>Ermitteln von γ - Schätzbereichen</td></tr>
</table>

6. Ausblick auf die Schließende Statistik

Zwei **globale Ideen** der Schließenden (Beurteilenden) Statistik sind das **Überprüfen** (Testen) **von Hypothesen** und das **„Hochrechnen“** (Konfidenzintervall). Im Folgenden soll kurz skizziert werden, welche zentrale Rolle dabei die zuvor beschriebenen γ - Schätzbereiche einnehmen.

Die Grundidee des **Testens von Hypothesen** ist relativ einfach:
Man geht von einer Vermutung, Annahme, Behauptung, allgemein von einer **Hypothese** (etwa über den relativen Anteil p eines Merkmals in der Grundgesamtheit) aus. Zur Überprüfung dieser Hypothese wird eine (Zufalls-)Stichprobe gezogen.

Wenn die Hypothese richtig ist, kann man mit (großer) Wahrscheinlichkeit γ damit rechnen, dass die relative Häufigkeit des Merkmals in der Stichprobe im γ - Schätzbereich liegt. Liegt die relative Häufigkeit der Stichprobe dann tatsächlich *innerhalb des* γ *- Schätzbereichs*, ist das *Stichprobenergebnis mit der Hypothese kompatibel*, und man wird die *Hypothese nicht zurückweisen* können.

Für den Fall hingegen, dass das *Stichprobenergebnis außerhalb des* γ *- Schätzbereichs* liegt, kann man sich Folgendes überlegen: Nimmt man an, dass die Hypothese stimmt (und sowohl Stichprobenauswahl als auch Befragung korrekt durchgeführt wurden), so ist ein Stichprobenergebnis aufgetreten, das sehr unwahrscheinlich ist (einen solchen Stichprobenwert wird nur sehr selten, nämlich in $\alpha = 1 - \gamma$ aller Fälle, beobachten). Ehe man an einem derart unwahrscheinlichen Ergebnis festhält, wird man wohl eher annehmen, dass die *Hypothese* unzutreffend ist und sie daher *zurückweisen (ablehnen).*

Beispiel 7: Der Leiter eines Fremdenverkehrsbüros behauptet, dass 40% aller österreichischen Familien ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben.

Wenn diese Behauptung richtig ist, dann wird man in einer Stichprobe von $n = 200$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% (also in durchschnittlich 95 von 100 Stichproben) zwischen 66 (33%) und 94 (47%) Familien finden, die ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben. Das heißt, ein Stichprobenergebnis zwischen 33% und 47% wird mit der Behauptung verträglich sein, und man wird in diesem Fall die Behauptung nicht zurückweisen können.

Falls die Behauptung stimmt, ist jedoch ein Stichprobenergebnis, das außerhalb des Bereichs [0,33; 0,47] liegt, sehr unwahrscheinlich; man kann mit einem derartigen Stichprobenergebnis durchschnittlich nur in 5 von 100 Fällen rechnen. Tritt ein solcher Fall ein, so sind Zweifel an der Richtigkeit der Behauptung durchaus angebracht. Man wird die Behauptung (mit einer *Irrtumswahrscheinlichkeit* von $\gamma = 5\%$) zurückweisen und kann behaupten, dass unter allen österreichischen Familien der Anteil der Familien, die ihren letzten Sommerurlaub im Ausland verbracht haben, ungleich 40% ist (vgl. Abb. 5).

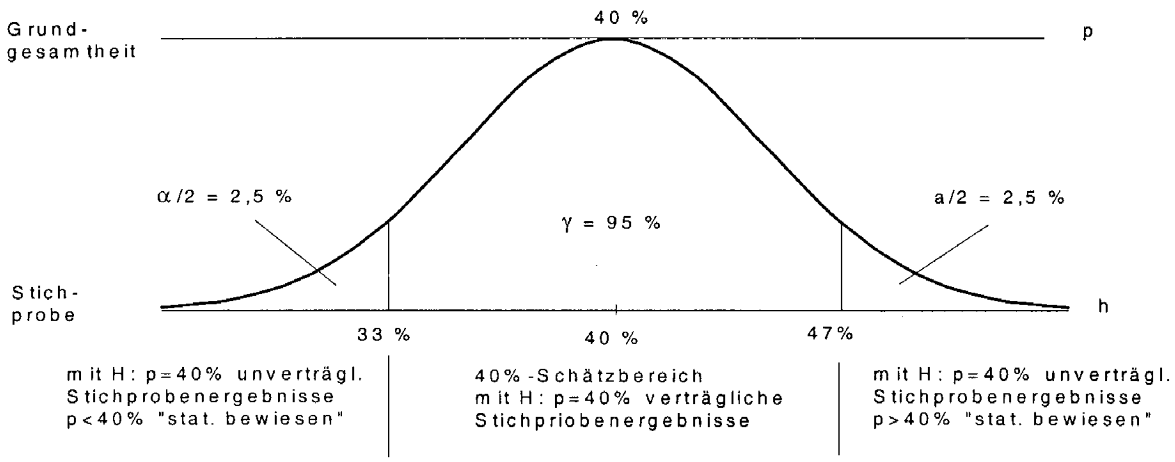

Abb. 5

Die "**Hochrechnung**" geht nicht von Annahmen, Vermutungen, Behauptungen über Parameter der Grundgesamtheit aus, sondern versucht *Parameter der Grundgesamtheit mittels Stichproben zu "schätzen"*: Man kennt, beobachtet, ermittelt etwa die relative Häufigkeit h´ eines Ereignisses in einer Stichprobe und "schätzt" mit diesem Wert (mit einer gewissen Unsicherheit und Unschärfe) den entsprechenden Wert in der Grundgesamtheit. Dabei geht man von der Überlegung aus, dass - sofern es sich nicht um ein extremes Stichprobenergebnis handelt - das Stichprobenergebnis h´ im γ - Schätzbereich um den gesuchten relativen Anteil p in der Grundgesamtheit liegt. Das **γ - Konfidenzintervall** (Vertauensintervall) für den relativen Anteil p in der Grundgesamtheit kann somit als die Menge aller p, deren γ - Schätzbereiche die in der Stichprobe beobachtete relative Häufigkeit h´ enthalten, betrachtet (definiert) werden (vgl. Abb. 6).

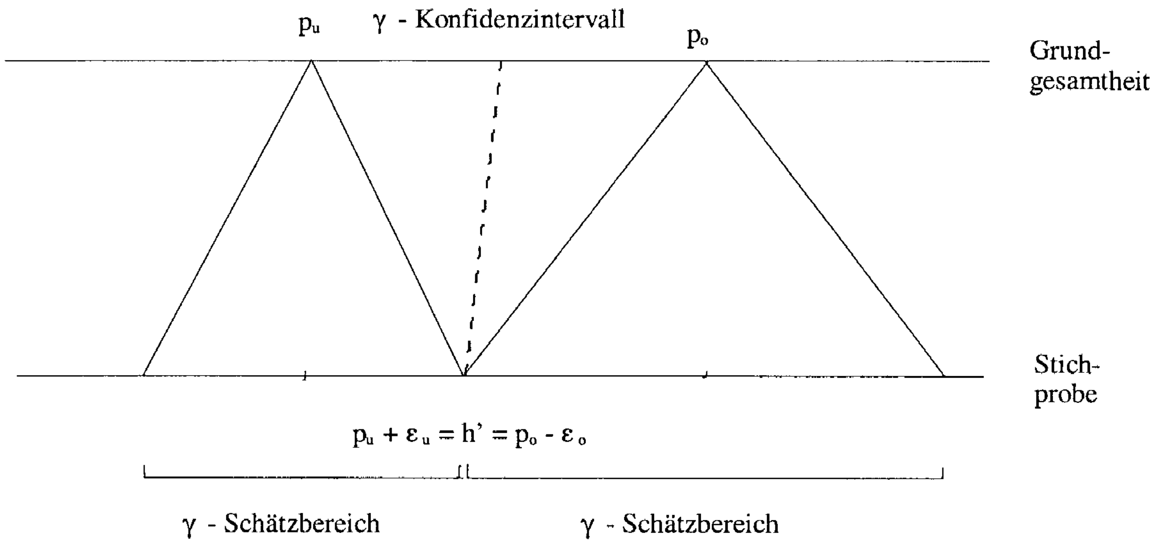

Abb. 6

Das hier vorgestellte Konzept wurde in den unten angeführten Lehrbüchern (Kröpfl u. a. 1999) und (Kronfellner/Peschek 1999) realisiert.

Literatur

Kronfellner, M. und Peschek, W. (2000): *Angewandte Mathematik.* öbv&hpt: Wien.

Kröpfl, B. u. a. (1999): *Angewandte Statistik.* Eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler. 2. Auflage. Hanser: München - Wien.

Peschek, W. (1995): *Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen einer Angewandten Statistik.* In: Müller, K. P. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1995. Franzbecker: Hildesheim, S. 372 – 75.